Формули векторного аналізу в сферичній і циліндричній системах координат

I. Сферична система координат

1) Перетворення координат

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\alpha\\
y &= r\sin\theta\sin\alpha\\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

2) Перетворення компонент вектора $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$

$$
\begin{aligned}
A_r &= A_x\sin\theta\cos\alpha + A_y\sin\theta\sin\alpha + A_z\cos\theta,\\
A_\theta &= A_x\cos\theta\cos\alpha + A_y\cos\theta\sin\alpha - A_z\sin\theta,\\
A_\alpha &= -A_x\sin\alpha + A_y\cos\alpha
\end{aligned}
$$

3) Зворотне перетворення компонент вектора $\boldsymbol{A} = (A_r, A_\theta, A_\alpha)$

$$
\begin{aligned}
A_x &= A_r\sin\theta\cos\alpha + A_\theta\cos\theta\cos\alpha - A_\alpha\sin\alpha,\\
A_y &= A_r\sin\theta\sin\alpha + A_\theta\cos\theta\sin\alpha + A_\alpha\cos\alpha,\\
A_z &= A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta.
\end{aligned}
$$

4) Градієнт скалярної функції ϕ

$$
\boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha
$$

5) Дівергенція векторної функції $\boldsymbol{A} = (A_r, A_\theta, A_\alpha)$

$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}
$$

6) Ротор векторної функції $\boldsymbol{A} = (A_r, A_\theta, A_\alpha)$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = {}& \frac{\boldsymbol{e}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\alpha\sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\alpha}\right] + \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\alpha\right)\right]\\
&+ \frac{\boldsymbol{e}_\alpha}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]
\end{aligned}
$$

7) Лапласіан скалярної функції ϕ

$$
\Delta\phi = \Delta_r\phi + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\alpha}\phi,
$$

$$
\Delta_r\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right), \qquad \Delta_{\theta\alpha}\phi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2}
$$

II. Циліндрична система координат

1) Перетворення координат

$$x = \rho \cos \alpha$$
$$y = \rho \sin \alpha$$
$$z = z$$

2) Перетворення компонент вектора $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$

$$A_\rho = A_x \cos \alpha + A_y \sin \alpha,$$
$$A_\alpha = -A_x \sin \alpha + A_y \cos \alpha,$$
$$A_z = A_z$$

3) Зворотне перетворення компонент вектора $\boldsymbol{A} = (A_\rho, A_\alpha, A_z)$

$$A_x = A_\rho \cos \alpha - A_\alpha \sin \alpha,$$
$$A_y = A_\rho \sin \alpha + A_\alpha \cos \alpha,$$
$$A_z = A_z.$$

4) Градієнт скалярної функції ϕ

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}\boldsymbol{e}_\alpha + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

5) Дівергенція векторної функції $\boldsymbol{A} = (A_\rho, A_\alpha, A_z)$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

6) Ротор векторної функції $\boldsymbol{A} = (A_\rho, A_\alpha, A_z)$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\rho \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\right] + \boldsymbol{e}_\alpha \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right] + \frac{\boldsymbol{e}_z}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\alpha) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \alpha}\right]$$

7) Лапласіан скалярної функції ϕ

$$\Delta \phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$